

Exercice 3 :

On considère la fonction $\Psi_1(x)$, la résolution de l'équation de Schrödinger d'une particule libre à l'état stationnaire : $\Psi_1(x) = N \sin\left(\frac{\pi}{L}\right) \cdot x$

1. Déterminer le facteur de normalisation de la fonction $\Psi_1(x)$
2. Ecrire l'équation de Schrödinger d'une particule libre.
3. Déterminer les valeurs propres du système dans cet état.
4. Calculer les valeurs moyennes $\langle x \rangle$ et $\langle P_x \rangle$.
5. Etudier et tracer la courbe de la densité de probabilité de présence de la particule ($D(x) = \frac{dP}{dx}$) en fonction de x . En déduire la position probable de la particule.

On donne : $\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cdot x = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{L}\right) \cdot x\right)$

Corrigé Type d'Exercice 3 :

On a : $\Psi_1(x) = N \sin\left(\frac{\pi}{L}\right) \cdot x$

1. Détermination le facteur de normalisation de la fonction $\Psi_1(x)$

On applique la condition de normalisation : $\int_0^L |\Psi(x)|^2 \cdot dx = 1 \Rightarrow N^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi}{L}\right) \cdot x dx = 1$

$$\Rightarrow \frac{N^2}{2} \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}\right) \cdot x\right) dx = 1 \Rightarrow \frac{N^2}{2} \cdot \left[x - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{L}\right) \cdot x \right]_0^L = 1$$

$$\Rightarrow \frac{N^2}{2} \cdot \left[L - \frac{L}{2\pi} (0 - 0) \right] = 1 \Rightarrow 2N^2 \cdot L = 1 \Rightarrow N = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

2. Ecrire l'équation de Schrödinger d'une particule libre.

$$\text{On a : } \hat{H}_x |\psi_1(x)\rangle = E_1 |\psi_1(x)\rangle \Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} \right) |\psi_1(x)\rangle = E |\psi_1(x)\rangle$$

3. Détermination des valeurs propres du système dans cet état.

$$\hat{H}_x |\psi_1(x)\rangle = E_1 |\psi_1(x)\rangle \Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} \right) |\psi_1(x)\rangle = E_1 |\psi_1(x)\rangle$$

$$\text{On a : } |\psi_1(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} \right) |\psi_1(x)\rangle = E_1 |\psi_1(x)\rangle$$

Après de quelque manipulation, on trouve :

$$E_1 = \frac{h^2}{8m_e \cdot L^2}$$

4. Calculer les valeurs moyennes $\langle x \rangle$ et $\langle P_x \rangle$.

4.1 $\langle x \rangle$

$$1/ \hat{A} \cdot \psi_1(x) = x \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \neq \text{const} \psi_1(x)$$

$$2/ \langle \psi_1(x) | \psi_1(x) \rangle = 1$$

$$3/ \bar{x} = \int_E \psi_1(x)^* (x) \cdot \psi_1(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cdot dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \right] \cdot dx$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{2L} \int_0^L \frac{x^2}{2} dx - \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{2} \int_0^L x \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx = \frac{L^2}{2L} - \left[\frac{1}{L} \cdot \int_0^L x \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cdot dx \right]_0^L = \frac{L}{2} - 0$$

$$\bar{x} = \frac{L}{2}$$

4.2 $\langle P_x \rangle$

$$1/ \hat{p}_x \cdot \psi_1(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right] = \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\pi}{L} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right] \neq \text{const} \psi_1(x)$$

$$2/ \langle \psi_1(x) | \psi_1(x) \rangle = 1$$

$$3/ \bar{p}_x = \int_E \psi_1(x)^* (x) \cdot \hat{p}_x \cdot \psi_1(x) dx = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right] dx = \frac{2}{2L} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\pi}{L} \int_0^L 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx$$

$$\Rightarrow \bar{p}_x = \frac{\hbar \cdot \pi}{i \cdot L^2} \int_0^L 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cdot dx = \frac{\hbar \cdot \pi}{i \cdot L^2} \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cdot dx = \frac{\hbar \cdot \pi}{i \cdot L^2} \cdot \frac{L}{2\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \right]_0^L = 0$$

$$\Rightarrow \bar{p}_x = 0$$

5. Etude et traçage la courbe de la densité de probabilité de présence de la particule ($D(x) = \frac{dP}{dx}$) en fonction de x.

On a : $dP = |\psi_1(x)|^2 \cdot dx \Rightarrow D(x) = \frac{dP}{dx} = |\psi_1(x)|^2 = \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cdot x$

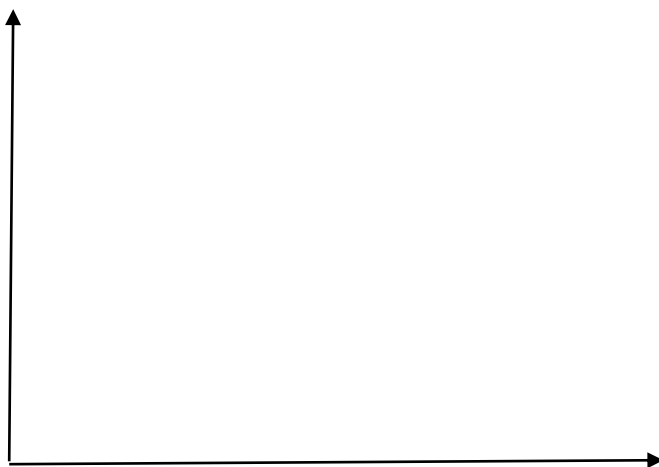
$D(x) = \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cdot x$

$D'(x) = \left(\sin^2\left(\frac{2\pi}{L}\right) \cdot x\right)' = \frac{1}{2}(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}\right) \cdot x)' = 0$

$\Rightarrow D'(x) = -\frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{L}\right) \cdot x = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{L}\right) \cdot x = \sin\pi \Rightarrow x = \frac{L}{2}$

x	0	L/2	L
D'(x)	+		-
D(x)			

6. La courbe :



7. La position probable de la particule est : $x = \frac{L}{2}$